

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	9
Введение	13
§ 1. Метод усреднения в задачах небесной механики	25
1. Предварительные замечания (25). 2. Уравнения плоской задачи трех тел (25). 3. Схема усреднения Гаусса (27). 4. Схема усреднения Фату (28). 3. Схема усреднения Делоне — Хилла (32).	
§ 2. Метод Ван-дер-Поля	35
1. Метод усреднения Ван-дер-Поля (35). 2. Обоснование метода усреднения Фату (38). 3. Обоснование метода Ван-дер-Поля Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси (42). 4. Обоснование метода усреднения для бесконечного интервала времени в случае периодического движения (46). 5. Решение уравнения Ван-дер-Поля (49).	
§ 3. Приведение нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих «малый» и «большой» параметры, к стандартной форме	52
1. Предварительные замечания (52). 2. Приведение к стандартной форме системы уравнений второго порядка (52). 3. Приведение к стандартной форме системы уравнений с гироскопическими членами (53). 4. Приведение к стандартной форме канонических уравнений (55). 5. Приведение к стандартной форме уравнений m -го порядка, разрешенных относительно старшей производной (57).	
§ 4. Метод усреднения Н. Н. Боголюбова	60
1. Постановка задачи. Принятые обозначения (60). 2. Первое приближение (61). 3. Второе приближение (64). 4. Построение высших приближений (69). 5. Анализ усредненных уравнений (70). 6. Решение уравнения Ван-дер-Поля (72). 7. Об условиях, обеспечивающих однозначность в методе усреднения (73).	
§ 5. Маятник с вибрирующей точкой подвеса	76
1. Уравнение колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса (76). 2. Приведение уравнения колебаний маятника к стандартной форме (77). 3. Построение первого приближения (78). 4. Второе приближение (79).	
§ 6. Математическое обоснование метода усреднения Н. Н. Боголюбова	84
1. Задача математического обоснования (84). 2. Первая основная теорема Н. Н. Боголюбова (85).	
§ 7. Обоснование метода усреднения Н. Н. Боголюбова на бесконечном интервале времени	90
1. Постановка задачи и некоторые предположения (90). 2. Преобразование уравнений в стандартной форме (91). 3. Построение решений системы уравнений (7.41) (95). 4. Устойчивость полученных решений (99). 5. Вторая основная теорема Н. Н. Боголюбова (103). 6. Пример существования периодического решения в нелинейных системах (104). 7. Некоторые замечания относительно высших приближений (107).	
§ 8. Дальнейшее развитие и обобщение первой основной теоремы метода усреднения 110.	
1. Зависимость решений от параметра (110). 2. Связь между теоремой о зависимо-	

сти решений от параметра и первой теоремой метода усреднения (110). 3. Обобщение первой теоремы метода усреднения (111). 4. Обобщение теорем о непрерывной зависимости решений от параметра (112). 5. Обобщение первой теоремы метода усреднения на случай счетных систем дифференциальных уравнений (118). 6. Обоснование метода усреднения для уравнений с нерегулярной правой частью (120). 7. Пример уравнения с нерегулярной правой частью (122). 8. Воздействие мгновенных импульсов (122). 9. Усреднение при наличии в системе особых точек (124). 10. Оценки высших приближений (126).

- § 9. Усреднение в системах дифференциальных уравнений, находящихся под воздействием сил с высокой частотой 131
 1. Дифференциальные уравнения с быстро вращающейся фазой (131). 2. Построение преобразования, разделяющего переменные (132). 3. Построение усредненной системы первого приближения (133). 4. Замечание о точности получаемых приближений (136).
- § 10. Усреднение в дифференциальных уравнениях с медленно меняющимися параметрами 137
 1. Уравнение с медленно меняющимися параметрами (137). 2. Приведение к стандартной форме (138). 3. Построение усредненных уравнений в первом приближении (139). 4. Частные случаи системы (10.1) — (10.3) (139). 5. Системы уравнений с медленно меняющимися параметрами (142). 6. Теорема об оценке погрешности m -го приближения (142). 7. Маятник с медленно меняющейся длиной (143). 8. Колебания системы, возбуждаемые силами инерции неуравновешенной массы (145). 9. Адиабатический инвариант (146). 10. Об одном частном виде систем с медленно меняющимися параметрами (148). 11. Пример: колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса (151).
- § 11. Усреднение в системах, близких к точно интегрирующимся 153
 1. Постановка задачи (153). 2. Приведение уравнения (11.1) к стандартной форме (154). 3. Построение усредненных уравнений (156). 4. Уравнения первого приближения. Порядок погрешности (158). 5. Построение огибающих для амплитуд колебаний, описываемых уравнением (11.1) (161). 6. Пример уравнения, близкого к точно интегрируемому (162). 7. Воздействие внешних периодических сил на сильно нелинейные системы (164). 8. Интеграл действия (166).
- § 12. Усреднение в системах уравнений с малыми параметрами при высших производных 169
 1. Постановка задачи (169). 2. Основной подход к изучению системы (12.1) (170). 3. Теорема об усреднении (171). 4. Усреднение при наличии быстроколеблющихся внешних сил (174).
- § 13. Усреднение в системах, содержащих медленные и быстрые движения 176
 1. Общая постановка задачи (176). 2. Преобразование, разделяющее переменные (178). 3. Теорема об усреднении для системы (13.1) (183). 4. Зависимость средних значений от траекторий (185). 5. Системы, близкие к гамильтоновым с медленными переменными (188). 6. Маятник с переменной длиной (190). 7. Резонансные режимы в нелинейных системах (192).
- § 14. Усреднение в системах, содержащих вращение 198
 1. Постановка задачи (198). 2. Случай быстрого вращения (199). 3. Возмущение быстрых вращений (203). 4. Случай малой угловой скорости вращения (204). 5. Пример: маятник Эйнштейна во вращательном режиме (207). 6. Резонансные явления во вращательных системах (208). 7. Пример: движение спутника относительно центра масс (211).
- § 15. Метод усреднения для уравнений высшего порядка 217
 1. Приведение систем высшего порядка к стандартному виду (217). 2. Построение усредненной системы (217). 3. Уравнение второго порядка (220). 4. Колебания маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса (221).
- § 16. Метод усреднения для конечно-разностных уравнений 223
 1. Построение усредненных уравнений для конечно-разностной системы в стандартной форме (223). 2. Основная теорема об усреднении (225).
- § 17. Усреднение в системах с недифференцируемыми правыми частями 231

1. Теорема о существовании периодического решения (231).
- § 18. Усреднение в системах, возбуждаемых мгновенными силами 243
1. Воздействие мгновенных сил на систему с одной степенью свободы (243).
 2. Уравнения первого приближения. Улучшенное первое приближение (245).
 3. Стационарные режимы (246). 4. Примеры: часовой маятник; ламповый генератор (247). 5. Усреднение в системах с мгновенными силами в общем случае (249).
 6. Теоремы о соответствии решений точных и усредненных уравнений (251).
- § 19. Применение метода усреднения к исследованию дифференциальных уравнений с «периодическими» коэффициентами 253
1. Общие замечания (253). 2. Дифференциальное уравнение второго порядка (253). 3. Построение усредненной системы (254). 4. Линейное уравнение с периодическими коэффициентами (257).
- § 20. Усреднение в канонических и близких к каноническим системам 260
1. Усреднение в системах с периодическим гамильтонианом (260). 2. Сферический маятник с вибрирующей точкой подвеса (262). 3. Второй метод построения гамильтониана усредненного движения (263). 4. Пример: движение гироскопа с вибрирующей точкой подвеса (268).
- § 21. Применение метода усреднения для построения приближенных решений, соответствующих одночастотным колебаниям 270
1. Основные предположения и ограничения (270). 2. Преобразование системы к двум уравнениям в стандартной форме (271). 3. Энергетическая интерпретация уравнений (21.20) (273). 4. Пример построения решения, соответствующего одночастотному режиму в системе с распределенными параметрами (275). 5. Усреднение в системах высокого порядка при наличии одной нелинейности (277).
- § 22. Усреднение в системах дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром 279
1. Предварительные замечания и постановка задачи (279). 2. Обобщение первой основной теоремы метода усреднения (280). 3. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра (285). 4. Обобщение второй основной теоремы метода усреднения (287). 5. Сингулярно возмущенные уравнения с запаздыванием (289). 6. Усреднение в дифференциально-разностных уравнениях нейтрального типа (291). 7. Системы с запаздыванием и медленными переменными (292). 8. Примеры (293).
- § 23. Усреднение в стохастических системах 296
1. Постановка задачи (296). 2. Уравнение Колмогорова — Фоккера — Планка (297).
 3. Дифференциальные уравнения со случайными функциями (299). 4. Воздействие стационарного «белого шума» на автономную систему (300). 5. Воздействие стационарного «белого шума» на неавтономную систему (302). 6. Теоремы об оценках на конечном интервале времени (304). 7. Дальнейшее развитие принципа усреднения для стохастических уравнений (309). 8. Усреднение непосредственно в уравнениях Колмогорова — Фоккера — Планка (313). 9. Стохастические колебательные системы с медленно меняющимися параметрами (316). 10. Пример: параметрическое случайное возбуждение колебательной системы (317). 11. Пример: воздействие «белого шума» на автоколебательную систему (318). 12. Квазилинейные системы со случайным запаздыванием (319).
- § 24. Метод усреднения с точки зрения точечных преобразований 320
1. Основные определения (320). 2. Точечные отображения для точных и усредненных уравнений (321). 3. Соответствие между состояниями равновесия и периодическими решениями (322). 4. Применение метода усреднения к разрывным системам (323).
- § 25. Стробоскопический метод Н. Минорского и его связь с методом усреднения . . . 325
1. Стробоскопический метод (325). 2. Стробоскопические дифференциальные уравнения (326). 3. Примеры составления стробоскопических уравнений (328).
- § 26. Связь метода усреднения с другими приближенными методами 330
1. Метод эквивалентной линеаризации и связь его с методом усреднения (330).
 2. Метод разложения по двум переменным (331). 3. Связь между методом усреднения и методом разложения по двум переменным (334). 4. Пример (337).

5. Связь между методом усреднения и принципом гармонического баланса (338).

§ 27. Усреднение в уравнениях с частными производными	340
1. Уравнение, близкое к гиперболическому; приведение его к бесконечной системе (340). 2. Построение усредненных уравнений (342). 3. Пример: распространение электромагнитных колебаний по кабелю (342). 4. Уравнение колебаний океанских волн (343). 5. Пример: нерезонансный случай (345). 6. Пример: кажущиеся резонансы (346). 7. Усреднение в уравнениях, близких к гиперболическим с запаздыванием (347). 8. Уравнения, близкие к гиперболическим при наличии случайных сил (350). 9. Случайные колебания, описываемые нелинейным дифференциальным уравнением четвертого порядка (352). 10. Поперечные колебания балки под воздействием случайных сил (355). 11. Уравнения в частных производных при наличии случайного запаздывания (356).	
§ 28. Применение метода усреднения к уравнениям в частных производных, не сводящимся к бесконечномерным системам	358
1. Предварительные замечания (358). 2. Система дифференциальных уравнений первого порядка (358). 3. Непрерывная зависимость решения от параметра (360). 4. Принцип усреднения для задачи Коши (361). 5. Задача Коши для гиперболического уравнения с запаздыванием (363). 6. Теорема об усреднении для гиперболического уравнения с запаздыванием (364). 7. Распространение метода усреднения на квазилинейные гиперболические уравнения высшего порядка (368). 8. Смешанная задача для квазилинейных гиперболических уравнений (369). 9. Усреднение в параболических и эллиптических дифференциальных уравнениях (369).	
§ 29. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений в функциональных пространствах	375
1. Общие замечания (375). 2. Обобщение первой основной теоремы метода усреднения на случай гильбертова пространства (375). 3. Обобщение второй основной теоремы метода усреднения; предварительные замечания и обозначения (379). 4. Преобразование основной системы и вспомогательные утверждения (380). 5. Вторая основная теорема в случае гильбертова пространства (384). 6. Другие обобщения второй теоремы (385).	
§ 30. Усреднение и «укорочение» счетной системы дифференциальных уравнений в стандартной форме	387
§ 31. Усреднение в системах интегро-дифференциальных и интегральных уравнений	393
1. Предварительные замечания (393). 2. Интегро-дифференциальное уравнение в стандартной форме (393). 3. Частный случай системы (31.1) (395). 4. Интегро-дифференциальные уравнения, содержащие медленные и быстрые переменные (397). 5. Интегро-дифференциальные уравнения типа Фредгольма (398). 6. Пример: колебания маятника с полостью, заполненной вязкой жидкостью (398). 7. Усреднение в системах интегральных уравнений (400). 8. Дальнейшее развитие метода усреднения применительно к различным классам интегро-дифференциальных уравнений (402).	
§ 32. Усреднение в многочастотных системах	406
1. Постановка задачи. Основные особенности усреднения при резонансе (406). 2. Теорема об усреднении при наличии резонанса в начальный момент (409).	
§ 33. Усреднение в некоторых гироскопических системах	412
1. Случай колебательной системы со многими степенями свободы при наличии гироскопических членов (412). 2. Усреднение в некоторых специальных системах теории гироскопов (416). 3. Пример: движение астатического гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании (418).	
§ 34. Метод усреднения и задача о разделении движений	421
§ 35. Применение метода усреднения для исследования устойчивости движения	425
Литература	431